

Progressioni Geometriche (Quesiti da 1 a 8)

Premessa 1 Progressioni Geometriche

La progressione geometrica è una successione così costituita

$$P(1)=K \quad P(2)=Kd, \quad P(3)=Kd^2 \dots \dots \dots \text{in generale} \quad P(n)=Kd^{n-1}$$

In tale progressione il rapporto tra due immagini consecutive qualsiasi è d.

$$P(i)/P(i-1)=d \quad \text{per ogni } i \text{ intero positivo}$$

d è chiamato ragione della progressione , K è il primo elemento della progressione

Si definisce serie geometrica la successione così costituita

$$S(1)=P(1)$$

$$S(2)=P(1)+P(2)$$

$$S(3)=P(1)+P(2)+P(3)$$

..

..

..

$$S(n)=P(1)+P(2)+P(3)+\dots\dots\dots P(n)$$

cioè il generico elemento n di questa successione è la somma dei primi n termini della progressione geometrica.

Un esempio di progressione geometrica è:

$$P(1)=1, \quad P(2)=2, \quad P(3)=4, \dots \dots \dots P(n)=2^{n-1} \quad \text{è una progressione geometrica di ragione 2}$$

La corrispondente serie aritmetica è

$$S(1)=1, \quad S(2)=1+2, \quad S(3)=1+2+2^2, \quad \dots \quad S(n)=1+2+2^2+\dots\dots\dots+2^{(n-1)}$$

Quesito 1

Costruisci una progressione geometrica e determina la corrispondente serie geometrica.

In generale

Si può dimostrare che la generica serie geometrica

$$S(n) = K + Kd + Kd^2 + Kd^3 + \dots + Kd^{n-1} = K(1 + d + d^2 + d^3 + \dots + d^{n-1}) =$$

$$= K \frac{1 - d^n}{1 - d}$$

Per dimostrare ciò è sufficiente dimostrare che

$$(1 + d + d^2 + d^3 + \dots + d^{n-1}) = \frac{1 - d^n}{1 - d}$$

ciò è facilmente verificabile perché

$$(1 + d + d^2 + d^3 + \dots + d^{n-1})(1 - d) = 1 + d + d^2 + d^3 + \dots + d^{n-1} - d - d^2 - d^3 - \dots - d^{n-1} - d^n$$

tutti gli addendi di questa somma algebrica si semplificano ad eccezione del primo ed ultimo elemento.

Quesito 2

Elenca i primi 10 elementi di una progressione geometrica di ragione 3 e con primo elemento uguale a 5.

Determina l'elemento 50-mo della serie geometrica corrispondente e l'elemento 1000-mo della serie geometrica corrispondente.

Quesito 3

Elenca i primi 10 elementi di una progressione geometrica di ragione $1/2$ e con primo elemento uguale a 1.

Determina l'elemento 100-mo della serie geometrica corrispondente e l'elemento 1000-mo della serie geometrica corrispondente.

Quesito 4

Elenca i primi 10 elementi di una progressione geometrica di ragione -1 e con primo elemento uguale a 2.

Determina l'elemento 10-mo della serie geometrica corrispondente.

Quesito 5

Data la funzione $f(x) = x^2 - 1$, si consideri la successione così definita:

$a_1 = 0$, $a_2 = f(a_1)$, ..., $a_{n+1} = f(a_n)$, per ogni numero naturale n .

Quanto vale a_{64} ?

- (A) -64 (B) -1 (C) 0 (D) 63

Quesito 6

Trova un modo per esprimere mediante una formula, al variare di n tra i numeri interi positivi, quanto vale $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$.

Quesito 7

Verifica col computer che per n intero positivo $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (n \cdot (n+1) / 2)^2$.

Quesito 8

Una colonia di batteri cresce secondo la seguente legge: ogni giorno il numero dei batteri si raddoppia ma si ha una perdita (costante) di n batteri; pertanto, se in un certo giorno il numero dei batteri è a , il giorno dopo ce ne sono $2a-n$. Se all'inizio nella colonia ci sono 100 batteri e dopo due giorni ce ne sono 250, dopo altri due giorni il numero dei batteri è uguale a:

- A) 400 B) 625 C) 850 D) 950